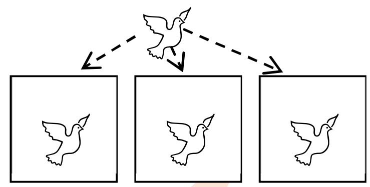
اصل لانه کبوتری (اصل حجره‌ها)

فرض کنیم ٤ کبوتر داریم و ۳ لانه، می‌خواهیم کبوترها را در لانه‌ها قرار دهیم و هر لانه به اندازه همه آنها نیز جا دارد. بهترین حالت آن است که سعی کنیم کبوترها را در همه لانه‌ها پخش کنیم، خوب این‌کار را می‌کنیم، مطابق شکل زیر ۳ کبوتر اول را در ۳ لانه قرار می‌دهیم، کبوتر چهارم مجبور است که در یکی از لانه‌ها قرار گیرد که قبلاً پر شده بود، پس بالاجبار باید در یکی از لانه‌ها **حداقل** دو کبوتر قرار گیرد. مهم نیست که در کدام لانه دو کبوتر قرار می‌گیرد.



شما می‌توانید حالت‌های مختلف دیگر را امتحان نمایید ممکن است سه کبوتر را در یک لانه قرار دهید و یک کبوتر را در لانه‌ای دیگر، در اینصورت لانه‌ای خالی می‌ماند، با این حال در این‌حالت هم لانه‌ای وجود دارد که **حداقل** دو کبوتر در آن قرار دارد (لانه‌ای که دارای سه کبوتر است.)

شاید هر چهار کبوتر را در یک لانه قرار دهیم، باز هم حرف ما رد نمی‌شود، وقتی می‌گوییم لانه‌ای وجود دارد که حداقل دو کبوتر در آن قرار دارند، می‌تواند در آن لانه بیشتر از دو کبوتر هم باشد، مهم این است که **حداقل** دو کبوتر در آن هستند.

در اینجا می‌تواند لانه یا لانه‌هایی هم خالی بمانند.

فرض کنیم ۵ کبوتر و ۳ لانه داریم، آنگاه بطور قطع چه چیزی را می‌توان بیان کرد؟

خوب ایده‌آل‌ترین حالت این است که باز هم در هر لانه یک کبوتر قرار دهیم، ۲ کبوتر باقی می‌ماند، این دو را می‌توان در یکی از ۳ لانه قرار داد و یا می‌توان هر یک را در دو لانه مجزا که قبلاً پر شده‌اند قرار داد، در هر صورت در یکی از لانه‌ها حداقل دو کبوتر قرار می‌گیرند.

تعریف

اگر n کبوتر و m لانه داشته باشیم بطوریکه $n > m$ آنگاه بطور قطع می‌توان گفت:

لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل دو کبوتر قرار دارند. این استدلال به **اصل لانه کبوتری** یا اصل حجره‌ها معروف است.

توجه داریم که شاید در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار گیرند و یا حتی لانه‌هایی هم خالی بمانند، مهم این است که در یکی از لانه‌ها حداقل دو کبوتر قرار می‌گیرند (دو کبوتر یا بیشتر از آن).

حال فرض کنید ۷ کبوتر داریم و ۳ لانه، اگر در هر لانه ۲ کبوتر قرار دهیم یکی از آنها باقی می‌ماند، پس مجبوریم کبوتر آخر را در یکی از لانه‌ها جا دهیم، بنابراین در لانه‌ای ۳ کبوتر قرار می‌گیرد. شما می‌توانید حالات مختلف دیگر را بررسی نمایید، می‌بینید در بعضی از حالات تعدادی لانه خالی می‌ماند اما در یکی از لانه‌ها حداقل ۳ کبوتر جا می‌گیرد (شاید بیشتر از ۳ کبوتر هم باشد).

اگر ۲۰ کبوتر داشته باشیم و ۳ لانه، آنوقت چه می‌توان گفت؟ مسلماً حرف شما هم این است که لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند، زیرا فرض کنیم در هر لانه ۶ کبوتر بتوان قرار داد، دو تای آنها باقی می‌مانند که اگر آنها را پخش کنیم بالاخره در یکی از لانه‌ها ۷ کبوتر (شاید هم ۸ کبوتر) قرار می‌گیرد، پس می‌توان گفت لانه‌ای وجود دارد که درآن حداقل ۷ کبوتر جا می‌گیرند.

در حالت کلی اصل لانه کبوتری را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

نکته

اگر n کبوتر و m لانه داشته باشیم بطوریکه $n > m$، آنگاه در یکی از لانه‌ها حداقل $k = \left[\frac{n}{m}\right] + 1$ کبوتر قرار می‌گیرد.

($[\ ]$ علامت جزء صحیح می‌باشد.)

توجه: اگر n مضرب m باشد، آنگاه فرمول فوق به $k = \left[\frac{n-1}{m}\right] + 1$ تبدیل می‌شود. به عبارتی این فرمول کلی‌تر از فرمول فوق است.

از اصل لانه کبوتری در حل خیلی از مسائل می‌توان استفاده نمود.

مثال ۱- شخصی برای مهمانی خود ۳۹ نفر را دعوت کرده است. حداقل چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است.
[۸۶/۰۶] -[۸۹/۰۳]

حل- می‌توان مهمان‌ها را کبوتر و روزهای هفته را لانه در نظر گرفت، پس ۳۹ کبوتر و ۷ لانه داریم، لذا خواهیم داشت:

$$k=\left[\frac{۳۹}{۷}\right]+۱=۵+۱=۶$$

در نتیجه حداقل ۶ مهمان در یکی از روزهای هفته بدنیا آمده‌اند (مهم نیست در کدام روز هفته).

مثال ۲- ۱۳نفر در یک مهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ٤ نفر آنها در یک فصل سال متولد شده‌اند. [۸۱/۱۰]

حل- می‌توان مهمان‌ها را کبوتر و فصل‌های سال را لانه در نظر گرفت، پس ۱۳ کبوتر و ٤ لانه (٤فصل) داریم، لذا خواهیم داشت:

$$k=\left[\frac{۱۳}{٤}\right]+۱=۳+۱=٤$$

یعنی در یکی از فصول سال حداقل ٤ نفر به دنیا آمده‌اند.

تمرین ۱- دبیرستانی ٤۰۰ دانش‌آموز دارد، حداقل چند نفر وجود دارند که روز تولدشان در هفته یکسان است؟ [۸٦/۱۰]

تمرین ۲ - از ۸۰۰ نفر دانش آموز یک مدرسه حداقل چند دانش آموز در یک روز سال متولد شده‌اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید.)
[۸۱/۰٦ م۲کشوری] - [۸۰/۰٦ کشوری] - [۸۴/۰۳ کشوری]

تمرین ۳- از ۱۸۵ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه دخترانه حداقل چند نفر دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند؟ چرا؟ [۸۳/۰٦]

تمرین ٤- شخصی برای مهمانی خود ٤۰ نفر را دعوت کرده است، دست کم چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است؟چرا؟ [۸۱/۰۳ م۲کشوری]

تمرین ۵- در یک کلاس ۳۰ نفری حداقل چند دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند؟ چرا؟ [۹۲/۰٦]

تمرین ٦- مدرسه‌ای ۶۰۱ نفر دانش‌آموز دارد، حداقل چند نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است و چرا؟ [۹۱/۰٦]

تمرین ۷- گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۱ نفری، A یا B یا O است. حداقل چند نفر از دانش‌آموزان گروه خونی یکسانی را دارند؟ چرا؟
[۹۰/۱۰]

مثال۳- ۵۰ ورزشکار مرد در رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده‌اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند. [۸۷/۰۳]

حل- ابتدا ببینیم وضعیت ورزشکاران (کبوترها) در سه رشته (لانه) چگونه است، ۵۰ ورزشکار داریم و ۳ رشته ورزشی پس:

$$k=\left[\frac{۵۰}{۳}\right]+۱=۱۶+۱=۱۷$$

یعنی می‌توان گفت حداقل ۱۷ نفر در یکی از رشته‌های ورزشی شرکت کرده‌اند.

حال این ۱۷ورزشکار هم رشته (۱۷کبوتر) از ٤ شهر (لانه) هستند، لذا داریم: $k=\left[\frac{۱۷}{٤}\right]+۱=٤+۱=۵$

یعنی حداقل ۵ نفر از ورزشکاران هم رشته از یکی از شهرها آمده‌اند.

البته حل این مسئله را سریعتر هم می‌شود انجام داد، تعداد رشته‌ها را در تعداد شهرها ضرب می‌کنیم که برابر $۱۲=٤\times۳$ می‌شود، حاصل را تعداد لانه‌ها در نظر می‌گیریم، پس داریم: $k=\left[\frac{۵۰}{۱۲}\right]+۱=٤+۱=۵$

یعنی حداقل ۵ ورزشکار هم رشته همشهری نیز هستند.

تمرین ۸– ۷۶ گاو در سه رنگ و چهار نژاد متعلق به ٤ نفر می‌باشند نشان دهید حداقل دو گاو هم‌رنگ و هم‌نژاد متعلق به یک نفر می‌باشد.

تمرین ۹– شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۱۰۲۵ نفر می‌باشند. آیا حداقل دو شرکت کننده یافت می‌شود که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان باشد؟ چرا؟ [۸۸/۰٦]

مثال ۴– برای اینکه در یک مدرسه دست کم ۶ دانش‌آموز در یکی از ماههای سال متولد شده باشند این مدرسه حداقل باید چند دانش‌آموز داشته باشد؟ [۸۵/۰٦]

حل– این مسئله برعکس مسائل قبلی می‌باشد. چون می‌خواهیم در یکی از ماه‌های سال دست‌کم ۶ دانش‌آموز متولد شده باشند، پس ابتدا باید در هر ماه ۵ دانش‌آموز را قرار دهیم، یعنی تا اینجا باید $5 \times 12 = 60$ دانش‌آموز داشته باشیم، حال اگر یک نفر دیگر اضافه کنیم آن یک نفر باید در یکی از ۱۲ماه قرار گیرد تا یک ماه پیدا شود که حداقل ۶ دانش‌آموز در آن بدنیا آمده‌اند. در نتیجه باید ۶۱ دانش‌آموز داشته باشیم.

نکته

فرض کنید m لانه داریم و می‌خواهیم تعدادی کبوتر در آنها قرار دهیم بطوریکه با اطمینان بگوییم در یکی از لانه‌ها دست‌کم k کبوتر قرار دارد آنگاه کمترین مقدار کبوترها برابر است با: $n = (k-1)m+1$

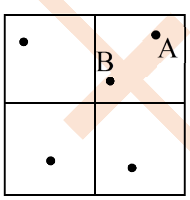
بنابراین در مثال قبل حداقل تعداد دانش‌آموزان برابر است با: $n = (k-1)m+1 = (6-1)\times 12+1 = 61$

تمرین ۱۰– برای اینکه در یک مدرسه دست کم ۷ دانش‌آموز در یکی از روزهای سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش‌آموز داشته باشد؟ [۷۹/۰٦]

تمرین ۱۱– یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش‌آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش‌آموز در یک ماه از سال متولد شده باشند. [۹۳/۰۲]

مثال ۵– پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ٤ سانتیمتر مفروضند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $2\sqrt{2}$ است. [۷۸/۰۳]

حل– مربع مذکور را به صورت مقابل به ٤ مربع هم اندازه به ضلع ۲ سانتیمتر تقسیم می‌کنیم:



حال ۵ نقطه (کبوتر) داریم و ٤ مربع (لانه)، پس حداقل دو نقطه مثل A و B در یکی از مربع‌ها قرار می‌گیرند.

اما در **<u>یک مربع حداکثر فاصله بین دو نقطه آن برابر است با اندازه قطر مربع</u>**، یعنی:

$$AB \le \text{قطر مربع} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

تمرین ۱۲– درون یک مربع به ضلع واحد ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است. [۷۸/۰۵] - [۸٦/۰۳] -[۸۹/۱۰]

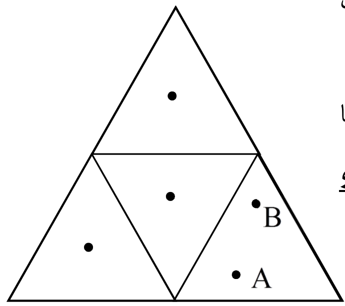
تمرین ۱۳– هفت نقطه داخل مستطیلی به ابعاد ٤ و ۶ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این هفت نقطه کمتر از $2\sqrt{2}$ است. [۸۷/۱۰] - [۸۲/۰٦]

تمرین ١٤– پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند. ثابت کنید: [۹۱/۱۰]-[۹۲/۰۳]-[۸۴/۱۰]- [۸۱/۰۳ شهرتهران]

حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.

مثال ۶– مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث درنظر می‌گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آنها کمتر از ۱ است. **[۸۲/۱۰]**

حل– مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده را به ٤ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ به‌صورت مقابل تقسیم می‌کنیم.



حال ۵ کبوتر (نقطه) داریم و ٤ لانه، لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه در یکی از مثلث‌ها قرار می‌گیرند(نقاط A و B). می‌دانیم **در یک مثلث متساوی‌الاضلاع حداکثر فاصله بین هر دو نقطه آن برابر است با طول ضلع مثلث**، پس:

$$AB \leq \text{طول ضلع مثلث‌های کوچک} = ۱$$

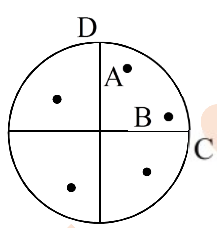
تمرین ۱۵– اگر ۱۰ نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد انتخاب شده باشد ثابت کنید حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها کمتر از $\frac{۱}{۳}$ است. **[۸۰/۰۳]-[۸۵/۱۰]**

تمرین ١٦– پنج نقطه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است. **[۹۲/۱۰]**

تمرین ۱۷– هفت نقطه درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید فاصله‌ی دست کم دو تا از این نقطه‌ها از ۱ کمتر است. **[۸۸/۰۳]**

مثال ۷– ۵ نقطه داخل دایره‌ای به شعاع R مفروض است. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $R\sqrt{۲}$ است. **[۸۳/۰۳]**

حل– دایره را به ٤ قسمت مساوی به‌صورت مقابل تقسیم می‌کنیم:

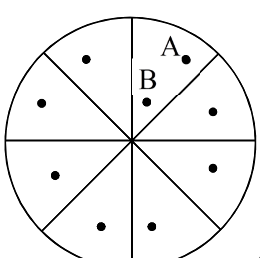


۵ کبوتر(نقطه) و ٤ لانه(ربع دایره) داریم، بنابراین طبق اصل لانه کبوتری باید حداقل ۲ نقطه در یکی از قست‌ها قرار گیرند (نقاط A و B)، اما **در یک ربع دایره حداکثر فاصله بین نقاط مختلف آن برابر است با فاصله دو سر کمان** CD (این کمان بزرگتر از شعاع دایره است.)، لذا داریم:

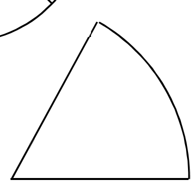
$$AB \leq CD = \underbrace{\sqrt{R^۲ + R^۲}}_{\boxed{\text{قضیه‌ی فیثاغورث}}} = \sqrt{۲R^۲} = R\sqrt{۲}$$

مثال ۸– ۹ نقطه درون دایره‌ای به شعاع واحد انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌ای کمتر از واحد را دارند. **[۸۷/۰٦]**

حل– دایره را به ۸ قسمت مساوی به صورت مقابل تقسیم می‌کنیم:



۹کبوتر(نقطه) و ۸ لانه داریم، بنابراین طبق اصل لانه کبوتری باید حداقل ۲ نقطه در یکی از قست‌ها قرار گیرند(نقاط A و B)، اما در این قسمت‌ها حداکثر فاصله بین هر دو نقطه دلخواه آن برابر است با شعاع دایره *، یعنی: $AB \leq R = ۱$



* در قطاعی از دایره بصورت مقابل اگر $۰ < \alpha < ۶۰^\circ$ باشد آنگاه حداکثر فاصله بین نقاط آن برابر است با شعاع دایره و اگر $۶۰^\circ < \alpha \leq ۹۰^\circ$ آنگاه حداکثر فاصله بین نقاط آن برابر است CD.

(به تفاوت حل دو مثال اخیر توجه داشته باشید.)

مثال ۹- ۲۰ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم می‌کنیم، نشان دهید حداقل ٤ عدد آنها باقیمانده‌ی مساوی دارند. [۸۴/۰۶]

حل- در ابتدا به این مطلب توجه کنیم که اگر عدد طبیعی n را بر عدد طبیعی m تقسیم نماییم آنگاه داریم: $n = km + r$

که در آن $k \in \mathbb{Z}$ خارج قسمت است و $r \in W$ باقیمانده.

باقیمانده تقسیم بصورت مقابل است: $0 \le r \le m-1$

یعنی باقیمانده تقسیم هر عدد حسابی از صفر تا $m-1$ می‌تواند باشد. لذا در تقسیم بر m تعداد باقیمانده‌های ممکن برابر m حالت است.

حال اگر هر عدد طبیعی را بر ۶ تقسیم کنیم باقیمانده بصورت $0 \le r \le 5$ است، یعنی برای آن ۶ حالت ممکن است. یعنی:

$R = \{0,1,2,3,4,5\}$ مجموعه باقیمانده‌ها

پس اگر ۲۰ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم نماییم باقیمانده‌ی هر یک از آنها حتماً یکی از اعداد مجموعه فوق است، لذا ۲۰ کبوتر (عدد) داریم و ۶ لانه(باقیمانده)، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل $\left[\frac{20}{6}\right]+1=4$ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، در نتیجه حداقل ٤ عدد دارای باقیمانده یکسان هستند. (می‌توانید ۲۰ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم کنید و مسئله را امتحان کنید.)

مثال ۱۰- فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی ۲۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد. اگر اعضای S را بر عدد ۱۹ تقسیم کنیم نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۱۹ هستند. [۷۷/۱۰]

حل- می‌دانیم مجموعه باقیمانده‌ها در تقسیم بر ۱۹ بصورت مقابل است: $R = \{0,1,2,\dots,18\}$ یا $0 \le R \le 18$

پس ۲۰ عدد(کبوتر) داریم که اگر بر ۱۹ تقسیم کنیم باقیمانده هر یک از آنها یکی از اعداد مجموعه R می‌شود، یعنی تعداد لانه‌ها برابر ۱۹است، لذا طبق اصل لانه کبوتری باید حداقل $\left[\frac{20}{19}\right]+1=2$ عدد دارای باقیمانده‌ی یکسان باشند.

تمرین ۱۸- ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۱۰۰ عدد را بر ۱۵ تقسیم کنیم حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۱۵ هستند. [۸۵/۰۳]

تمرین ۱۹- S یک زیر مجموعه ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۳۰ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده‌اند. [۷۷/۰۶] -[۸۳/۱۰]

تمرین ۲۰- اگر ۲۱۰ عدد دلخواه و متمایز را بر ۲۰ تقسیم کنیم، حداقل چند عدد دارای باقیمانده یکسانی بر ۲۰ هستند؟ چرا؟ [۸۲/۰۳]

تمرین ۲۱- S یک زیر مجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۳۶ هستند. [۸۱/۰۶ شهر تهران]

تمرین ۲۲- S یک زیرمجموعه ۸۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۳۵ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده‌اند. [۸۰/۱۰ کشوری]

تمرین ۲۳- ۷۰ عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۷۰ عدد را بر ۳۰ تقسیم کنیم حداقل چند عدد دارای باقیمانده‌ی مساوی خواهند شد؟ چرا؟ [۷۹/۱۰]

تمرین ٢٤- ۲۲ عدد دلخواه را بر ۶ تقسیم می‌کنیم، نشان دهید حداقل ٤ عدد از آن‌ها باقیمانده مساوی خواهند داشت. [۸۸/۱۰]

تمرین ۲۵- اگر A یک زیرمجموعه‌ی ۲۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اعضای A را بر عدد ۲۶ تقسیم کنیم، نشان دهید که حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۲۶ هستند. [۸۹/۰۶]

تمرین ۲۶- S یک زیرمجموعه‌ی ۶۵ عضوی از اعداد طبیعی است، اگر اعضای S را بر عدد ۱۶ تقسیم کنیم، نشان دهید دست کم ۵ عضو از S دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۱۶ می‌باشند. **[۹۰/۰۳]**

تمرین ۲۷- ۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد ۲۴ تقسیم کرده‌ایم، حداقل چند تا از آنها باقیمانده‌های یکسانی را بر ۲۴ خواهند داشت؟ **[۹۱/۰۳]**

تمرین ۲۸- نشان دهید که اگر هر زیر مجموعه ۶ عضوی از مجموعه $S=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ باشد. **[۹۰/۰۶]**

حل تمرینات اصل لانه کبوتری (اصل حجره‌ها)

تمرین ۱- حداقل ۵۸ نفر در یک روز هفته به دنیا آمده‌اند $\left[\frac{۴۰۰}{۷}\right]+۱=۵۷+۱=۵۸$

تمرین ۲- $\left[\frac{۸۰۰}{۳۶۵}\right]+۱=۲+۱=۳$

تمرین ۳- $\left[\frac{۱۸۵}{۷}\right]+۱=۲۶+۱=۲۷$

تمرین ۴- $\left[\frac{۴۰}{۷}\right]+۱=۵+۱=۶$

تمرین ۵- $\left[\frac{۳۰}{۷}\right]+۱=۴+۱=۵$

تمرین ۶- $\left[\frac{۶۰۱}{۱۲}\right]+۱=۵۰+۱=۵۱$

تمرین ۷- $\left[\frac{۳۱}{۳}\right]+۱=۱۰+۱=۱۱$

تمرین ۸- $\underbrace{۳}_{\text{سه رنگ}}\times\underbrace{۴}_{\text{چهار نژاد}}\times\underbrace{۴}_{\text{چهار نفر}}=۴۸\Rightarrow\left[\frac{۷۶}{۴۸}\right]+۱=۱+۱=۲$

تمرین ۹- حروف الفبای فارسی ۳۲ تا می‌باشد.

حداقل ۳۳ نفر حرف اول نامشان یکسان است. $\left[\frac{۱۰۲۵}{۳۲}\right]+۱=۳۲+۱=۳۳$

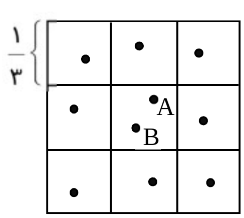
حداقل ۲ نفر از ۳۳ فوق حرف اول نام خانوادگی‌شان یکسان است. $\left[\frac{۳۳}{۳۲}\right]+۱=۱+۱=۲$

روش دوم: $۳۲\times۳۲=۱۰۲۴\Rightarrow\left[\frac{۱۰۲۵}{۱۰۲۴}\right]+۱=۱+۱=۲$

تمرین ۱۰- $(۷-۱)\times۳۶۵+۱=۲۱۹۱$

تمرین ۱۱- $(۱۳-۱)\times۱۲+۱=۱۴۵$

تمرین ۱۲- با تقسیم مربع اصلی به ۹ مربع کوچک به ضلع $\frac{۱}{۳}$، نه لانه و ده کبوتر(نقطه) داریم،

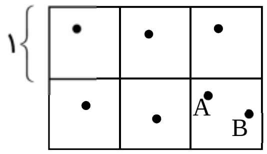


پس طبق اصل لانه کبوتر حداقل دو نقطه مانند **A** و **B** وجود دارند که در یک لانه قرار می‌گیرند.

می‌دانیم در یک مربع بیشترین فاصله برابر قطر مربع است، در نتیجه:

$$AB\le\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}$$

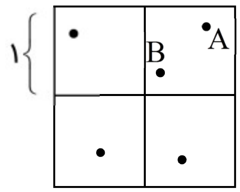
(توجه: قطر مربع به ضلع a برابر است با: $a\sqrt{۲}$)



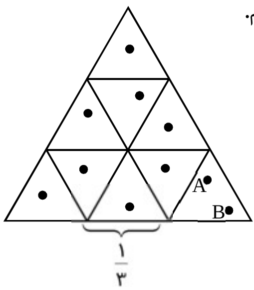
تمرین ۱۳- توضیحات همانند مثال قبل می‌باشد.

$AB \le ۱\sqrt{۲}$

تمرین ۱۴- $AB \le ۱\sqrt{۲}$



تمرین ۱۵- مطابق شکل مثلث را به ۹ مثلث همنهشت به ضلع $\frac{۱}{۳}$ تقسیم می‌کنیم. نه لانه و ده کبوتر(نقطه) داریم.



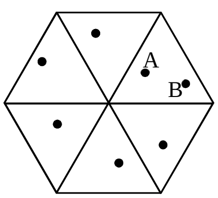
طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه مانند **A** و **B** در یک خانه قرار می‌گیرند.

می‌دانیم در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین فاصله نقاط برابر اندازه‌ی ضلع مثلث است، پس:

$$AB \le \frac{۱}{۳}$$

تمرین ۱۶- همانند مثال ۶.

تمرین ۱۷- مطابق شکل شش ضلعی را به ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم.



طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه مانند **A** و **B** در یکی از آنها قرار می‌گیرند.

می‌دانیم بیشترین فاصله بین نقاط یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر طول ضلع آن است، پس:

$$AB \le ۱$$

تمرین ۱۸- می‌دانیم مجموعه‌ی باقیمانده‌ها در تقسیم بر ۱۵ مجموعه‌ی مقابل است: $R = \{۰, ۱, ۲, \dots, ۱۴\}$

در تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۵ باقیمانده یکی از اعضای R می‌شود. ۱۰۰ کبوتر (عدد) و ۱۵ کبوتر(باقیمانده) داریم، پس:

$\left[\frac{۱۰۰}{۱۵}\right] + ۱ = ۶ + ۱ = ۷ \Rightarrow$ حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده‌ی یکسان هستند.

توجه: توضیح مثال‌های بعد به همین صورت است، پس جواب‌ها را بدون توضیح می‌نویسیم شما برای خودتان تحلیل کنید.

تمرین ۱۹- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۳۰ = $R = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots, ۲۹\}$

$$\left[\frac{۷۰}{۳۰}\right] + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

تمرین ۲۰- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۲۰ = $R = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots, ۱۹\}$

$$\left[\frac{۲۱۰}{۲۰}\right] + ۱ = ۱۰ + ۱ = ۱۱$$

تمرین ۲۱- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۳۶ = $R = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots, ۳۵\}$

$$\left[\frac{۳۷}{۳۶}\right] + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$$

تمرین ۲۲- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۳۵ = $R = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots, ۳۴\}$

$$\left[\frac{۸۰}{۳۵}\right]+۱=۲+۱=۳$$

تمرین ۲۳- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۳۰ = $R=\{۰,۱,۲,۳,...,۲۹\}$

$$\left[\frac{۷۰}{۳۰}\right]+۱=۲+۱=۳$$

تمرین ۲۴- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۶ = $R=\{۰,۱,۲,۳,٤,۵\}$

$$\left[\frac{۲۲}{۶}\right]+۱=۳+۱=٤$$

تمرین ۲۵- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۲۶ = $R=\{۰,۱,۲,۳,...,۲۵\}$

$$\left[\frac{۲۷}{۲۶}\right]+۱=۱+۱=۲$$

تمرین ۲۶- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۱۶ = $R=\{۰,۱,۲,۳,...,۱۵\}$

$$\left[\frac{۶۵}{۱۶}\right]+۱=٤+۱=۵$$

تمرین ۲۷- مجموعه باقیمانده‌ها بر ۲٤ = $R=\{۰,۱,۲,۳,...,۲۳\}$

$$\left[\frac{۵۰}{۲٤}\right]+۱=۲+۱=۳$$

تمرین ۲۸- مجموعه S را همانند زیر به صورت اجتماع چند مجموعه می‌نویسیم:

$$S=\{۱,۹\}\cup\{۲,۸\}\cup\{۳,۷\}\cup\{٤,۶\}\cup\{۵\}$$

می‌بینیم که ۵ زیر مجموعه هستند که جمع هر دو عضو هر مجموعه برابر ۱۰ است.

حال اگر بخواهیم ۶ زیر مجموعه انتخاب کنیم طبق اصل لانه کبوتری مجبوریم از یکی از آنها دو عضو انتخاب نماییم و می‌دانیم که مجموع این دو عضو برابر ۱۰ است.